

XIII. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia

Kolozsvár, 2010. május 14-16.

Variációs elvek és alkalmazások

Témavezető:

Dr. Varga Csaba, egyetemi tanár, Babeş-Bolyai Tudományegyetem,
Geometria tanszék

Szerző:

Molnár Andrea, Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematika-Informatika Kar,
Oktatói matematika szak, Mesteri, II. év

Tartalomjegyzék

1. Variációs elvek	3
1.1. Az Ekeland-, illetve a Borwein-Preiss variációs elv	3
1.2. Erős Ekeland variációs elv és a vele ekvivalens kijelentések tárgyalása	10
2. Paraméterezett Ekeland variációs elv és alkalmazásai	20
2.1. Értelmezések. Paraméterezett Ekeland variációs elv.	20
2.2. Az Ekeland-, és a Paraméterezett Ekeland variációs elvek alkalmazásai a Nash-egyensúly- pontok elméletében	23
3. Következtetések és további célok	26

Kivonat

A dolgozat célja a fontosabb variációs elvek ismertetése, illetve ezen elvek általánosításainak és alkalmazásainak bemutatása a paraméterezett Nash-egyensúlypontok elméletében.

Az első fejezetben az Ekeland-, illetve a Borwein-Preiss variációs elvekkel foglalkozunk, kitérve néhány általánosításukra is. Emellett tanulmányozni fogjuk az Erős Ekeland variációs elvet és a vele egyenértékű különböző kijelentéseket (a Drop- és a "Sziromlevél" tételt, illetve a Phelps lemmát), melyek közül egyesek geometriai jelentéssel is bírnak.

A dolgozat második részében a Nash-egyensúlyelméletet és a paraméterezett Nash egyensúlypontokat tárgyaljuk. Elsőként a Nash-egyensúlyi pont létezésének feltételeit vizsgáljuk, majd ezután megismerkedünk a paraméterezett Ekeland variációs elvvel, illetve az Ekeland elv minimax-problémákra való kiterjesztésével, melyet tulajdonképpen egy minimax variációs elvnek is tekinthetünk.

1. Variációs elvek

1.1. Az Ekeland-, illetve a Borwein-Preiss variációs elv

Ebben a részben először bemutatásra kerül a legismertebb variációs elvek közül az Ekeland-, illetve a Borwein-Preiss variációs elv, valamint ezek egy általánosítása, melyet L. Yongxing és S. Shuzhong adott meg.

1.1.1. Értelmezés. Legyen az $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ahol $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) függvény, illetve a

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in X \mid f(x) < \infty\}$$

halmaz. Ekkor a $\mathcal{D}(f)$ halmazt az f függvény **effektív tartományának** nevezzük. Ha $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$, azt mondjuk, hogy f **sajátos**.

1.1.2. Értelmezés. Tekintsük az $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, valamint az $x_0 \in X$ pontot. Jelölje $\mathcal{V}(x_0)$ az x_0 környezeteinek egy bázisát. Ekkor az f függvényt **alulról félig folytonosnak** nevezzük az x_0 pontban, ha

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0), \quad \text{ahol} \quad \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf_{x \in V} f(x).$$

1.1.1. Megjegyzés. Az $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvényt **alulról félig folytonosnak** nevezzük, ha alulról félig folytonos az X halmaz minden pontjában.

1.1.1. Tétel. A következő állítások egyenértékűek:

- a) az $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ függvény alulról félig folytonos;
- b) $\text{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}$ zárt részhalmaza $X \times \mathbb{R}$ -nek;
- c) bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ X halmazok zártak X -ben.

Elsőként az Ekeland variációs elvet tárgyaljuk. Ez az elv Ivar Ekeland nevéhez fűződik, és az 1974-ben, "On the variational principle" címen publikált cikkében jelenik meg először.

1.1.2. Tétel. (Ekeland variációs elv) Legyen (X, d) egy teljes metrikus tér és az $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ alulról félig folytonos, sajátos és alulról korlátos függvény. Továbbá tekintsük az $\varepsilon > 0$ tetszőleges, rögzített számot, valamint legyen $x \in X$, melyekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$f(x) \leq \inf_{y \in X} f(y) + \varepsilon. \quad (1.1.1)$$

Ekkor létezik $x_\varepsilon \in X$ úgy, hogy

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x); \quad (1.1.2)$$

$$d(x_\varepsilon, x) \leq 1; \quad (1.1.3)$$

$$f(y) > f(x_\varepsilon) - \varepsilon d(x_\varepsilon, y), \quad \text{bármely } y \in X, y \neq x_\varepsilon. \quad (1.1.4)$$

Bizonyítás. Induktívan megszerkesztjük az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, ahol $x_0 = x$. Az $x_n \in X$ -et tekintsük adottnak. Ekkor két esetet különböztethetünk meg:

I. $\forall y \neq x_n, f(y) > f(x_n) - \varepsilon d(x_n, y)$. Ekkor válasszuk x_{n+1} -et x_n -nek.

II. $\exists y \neq x_n, f(y) \leq f(x_n) - \varepsilon d(x_n, y)$. Ekkor legyen S_n az $y \in X$ elemek halmaza. Ekkor válasszuk meg az $x_{n+1} \in S_n$ -et úgy, hogy

$$f(x_{n+1}) - \inf_{y \in S_n} f(y) \leq \frac{1}{2} \cdot \left[f(x_n) - \inf_{y \in S_n} f(y) \right]. \quad (1.1.5)$$

Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat tehát egy Cauchy-sorozat. Valóban, ha az I. eset bármikor bekövetkezik, akkor a sorozat állandó. Ellenkező esetben fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\varepsilon d(x_n, x_{n+1}) \leq f(x_n) - f(x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva, kapjuk:

$$\varepsilon d(x_n, x_p) \leq f(x_n) - f(x_p), \forall n \leq p. \quad (1.1.6)$$

Látható, hogy az $f(x_n)$ sorozat csökkenő és alulról korlátos, ezáltal konvergens is, vagyis $f(x_n) - f(x_p) \rightarrow 0$, bármely $n \leq p$ esetén és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. Másrészt, az X teljes metrikus tér. Következésképpen, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x_\varepsilon$, amikor $n \rightarrow \infty$, illetve $x_\varepsilon \in X$.

Tehát azt kell igazolnunk, hogy x_ε kielégíti a (1.1.2), (1.1.3) illetve (1.1.4) feltételeket.

Mivel az $f(x_n)$ sorozat csökkenő és alulról korlátos, vagyis

$$f(x) = f(x_0) \geq f(x_1) \geq \dots f(x_n) \geq f(x_{n+1}) \geq \dots$$

illetve f alulról félig folytonos, azaz $f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, következik, hogy $f(x_\varepsilon) \leq f(x)$, ami pontosan az 1.1.2-es egyenlőtlenség.

A (1.1.6)-os egyenlőtlenségbe $n = 0$ -t helyettesítve,

$$\begin{aligned} \varepsilon d(x, x_p) &\leq f(x) - f(x_p) \leq f(x) - \inf_{y \in X} f(y) \\ &\leq \varepsilon \quad (\text{a feltevés alapján}). \end{aligned}$$

Határértékre térve p szerint, megkapjuk az (1.1.3)-as feltételt.

Most feltételezzük azt, hogy x_ε nem elégíti ki az (1.1.4)-es egyenlőtlenséget. Ekkor létezik egy $y \neq x_\varepsilon$ elem úgy, hogy $f(y) \leq f(x_\varepsilon) - \varepsilon d(x_\varepsilon, y)$. Ekkor az (1.1.6)-os egyenlőtlenség $p \rightarrow \infty$ esetén a következőképpen alakul:

$$f(y) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} f(x_p) \leq f(x_n) - \varepsilon d(x_n, y),$$

és így $y \in S_n$, bármely n esetén. Ugyanakkor az (1.1.5)-ös reláció így is felírható:

$$2f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq \inf_{y \in S_n} f(y) \leq f(y).$$

Amikor $n \rightarrow \infty$, $f(x_n) \rightarrow l$, innen a fenti egyenlőtlenség $l \leq f(y)$ -ra módosul. Mivel f alulról félig folytonos, ezért $f(x_\varepsilon) \leq l$. Ilyen formán az $f(x_\varepsilon) \leq f(y)$ egyenlőtlenséghez jutottunk, ami pedig ellentmond y megválasztásának. ■

Az alkalmazásokban gyakran használják az Ekeland-féle variációs elv következő változatát.

1.1.3. Tétel. Legyen (X, d) teljes metrikus tér és $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy alulról félig folytonos, sajátos és alulról korlátos függvény. Legyen továbbá $x \in X$ úgy, hogy:

$$f(x) \leq \inf_{y \in X} f(y) + \varepsilon. \quad (1.1.7)$$

Ekkor létezik $x_\varepsilon \in X$ úgy, hogy

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x); \quad (1.1.8)$$

$$d(x_\varepsilon, x) \leq \sqrt{\varepsilon}; \quad (1.1.9)$$

$$f(x_\varepsilon) < f(y) + \sqrt{\varepsilon} d(x_\varepsilon, y), \quad \text{bármely } y \in X, y \neq x_\varepsilon \text{ esetén.} \quad (1.1.10)$$

1.1.2. Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy ha az 1.2. tételben a d metrikát $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}d$ -vel helyettesítjük, akkor pontosan a fenti tételt kapjuk vissza.

A következő variációs elv Borwein és Preiss nevéhez fűződik. A két matematikus ezen eredményüket 1987-ben hozták nyilvánosságra ("A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions").

1.1.4. Tétel. (Borwein-Preiss féle variációs elv) Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy alulról félig folytonos, sajátos és alulról korlátos függvény és $\lambda > 0, p \geq 1$ két rögzített szám. Ekkor bármely $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ esetén, melyekre

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

létezik egy $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ sorozat, mely egy adott $x_\varepsilon \in X$ -hez konvergál, illetve egy $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \mu_n > 0$ számsorozat $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = 1 \right)$ úgy, hogy a $\phi_p : X \rightarrow \mathbb{R}, \phi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n d(x, x_n)^p$ függvényre fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} d(x_\varepsilon, x) &\leq \lambda, \\ f(x_\varepsilon) &< \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon, \\ f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \phi_p(x) &\geq f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \phi_p(x_\varepsilon). \end{aligned}$$

Az alábbiakban egy közös általánosítást mutatjuk be az Ekeland és a Borwein-Preiss variációs elveknek. Ezt az általánosítást L. Yongxing és S. Shuzhong adta, mégpedig a 2000-ben megjelent, "A generalization of Ekeland's ε -variational principle and its Borwein-Preiss variant" címet viselő publikációjukban.

1.1.5. Tétel. Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pedig egy sajátos, alulról félig folytonos és alulról korlátos függvény. Tételezzük fel, hogy a $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ függvény eleget tesz a következő feltételeknek:

- (i) $\rho(x, x) = 0$, minden $x \in X$ -re;
- (ii) bármely $(y_n, z_n) \in X \times X$ esetén $\rho(y_n, z_n) \rightarrow 0 \Rightarrow d(y_n, z_n) \rightarrow 0$;
- (iii) minden $z \in X$ -re $y \rightarrow \rho(y, z)$ alulról félig folytonos.

Tekintsük továbbá a $\delta_n \geq 0 (n \in \mathbb{N}^*)$, nemnegatív számokból álló sorozatot, ahol $\delta_0 > 0$.

Ekkor bármely $x_0 \in X$ és $\varepsilon > 0$ esetén, melyekre

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

létezik egy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sorozat, mely egy $x_\varepsilon \in X$ elemhez konvergál úgy, hogy

$$\rho(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1.11)$$

Ha $\delta_n > 0$ véges számú $n \in \mathbb{N}$ -re, akkor

$$f(x_\varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \rho(x_\varepsilon, x_n) \leq f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \quad (1.1.12)$$

és

$$\text{minden } x \neq x_\varepsilon \text{ esetén} \quad f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \rho(x, x_n) > f(x_\varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \rho(x_\varepsilon, x_n). \quad (1.1.13)$$

Ha $\delta_k > 0$ és bármely $j > k \geq 0$ -ra $\delta_j = 0$, akkor az (1.1.14) a következőképp alakul: minden $x \neq x_\varepsilon$ esetén létezik $m \in \mathbb{N}, m \geq k$ úgy,

$$f(x) + \sum_{n=0}^{k-1} \delta_n \rho(x, x_n) + \delta_k \rho(x, x_m) > f(x_\varepsilon) + \sum_{n=0}^{k-1} \delta_n \rho(x_\varepsilon, x_n) + \delta_k \rho(x_\varepsilon, x_m). \quad (1.1.14)$$

Bizonyítás. A bizonyításnál két esetet különböztetünk meg:

1. eset: $\delta_n > 0$ végtelen számú $n \in \mathbb{N}$ értékre,
2. eset: $\delta_n > 0$ csak véges számú $n \in \mathbb{N}$ értékre.

1. eset. Az általánosság megszorítása nélkül, feltételezhetjük, hogy $\delta_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

Induktívan megszerkesztjük az $(x_n)_{n \geq 1}$ és $(T(x_n))_{n \geq 1}$ sorozatokat, éspedig a következőképpen.

Tekintsük először a $T(x_0)$ halmazt:

$$T(x_0) = \{x \in X | f(x) + \delta_0 \rho(x, x_0) \leq f(x_0)\}. \quad (1.1.15)$$

Mivel f és $\rho(\cdot, x_0)$ alulról félig folytonosak és $x_0 \in T(x_0)$, következik, hogy $T(x_0)$ egy nemüres, zárt részhalmaza X -nek és bármely $y \in T(x_0)$ esetén

$$\delta_0 \rho(y, x_0) \leq f(x_0) - f(y) \leq f(x_0) - \inf_{x \in X} f(x) \leq \varepsilon. \quad (1.1.16)$$

Válasszuk meg az $x_1 \in T(x_0)$ elemet úgy, hogy

$$f(x_1) + \delta_0 \rho(x_1, x_0) \leq \inf_{x \in T(x_0)} \{f(x) + \delta_0 \rho(x, x_0)\} + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2 \delta_0}$$

és legyen

$$T(x_1) := \left\{ x \in T(x_0) | f(x) + \sum_{i=0}^1 \delta_i \rho(x, x_i) \leq f(x_1) + \delta_0 \rho(x_1, x_0) \right\}.$$

Az eljárást folytatva feltételezzük, hogy az $x_{n-1} \in T(x_{n-2})$ elemet már ily módon megválasztottuk. Ekkor tekintsük a következő halmazt:

$$\begin{aligned} T(x_{n-1}) &:= \left\{ x \in T(x_{n-2}) \mid f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(x, x_i) \leq \right. \\ &\quad \left. \leq f(x_{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-2} \delta_i \rho(x_{n-1}, x_i) \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

A következő lépésben válasszuk meg az $x_n \in T(x_{n-1})$ számot, melyre

$$\begin{aligned} f(x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(x_n, x_i) &\leq \\ &\leq \inf_{x \in T(x_{n-1})} \left\{ f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(x, x_i) \right\} + \frac{\delta_n \varepsilon}{2^n \delta_0}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

és tekintsük a

$$\begin{aligned} T(x_n) &:= \left\{ x \in T(x_{n-1}) \mid f(x) + \sum_{i=0}^n \delta_i \rho(x, x_i) \leq \right. \\ &\quad \left. \leq f(x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(x_n, x_i) \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

nemüres és zárt halmazt.

Felhasználva az (1.1.18) és (1.1.19) relációkat, következik, hogy minden $y \in T(x_n)$ esetén

$$\begin{aligned} \delta_n \rho(y, x_n) &\leq \left[f(x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(x_n, x_i) \right] - \left[f(y) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(y, x_i) \right] \leq \\ &\leq \left[f(x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(x_n, x_i) \right] - \inf_{x \in T(x_{n-1})} \left[f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \rho(x, x_i) \right] \leq \frac{\delta_n \varepsilon}{2^n \delta_0}, \end{aligned}$$

vagyis bármely $y \in T(x_n)$ -re

$$\rho(y, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}. \quad (1.1.20)$$

Látható, hogy $\rho(y, x_n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ekkor az (ii) feltétel szerint $d(y, x_n) \rightarrow 0$, amikor $n \rightarrow \infty$, vagyis $\text{diam } T(x_n) \rightarrow 0$, ahol $\text{diam } T(x_n)$ -nel jelöltük a $T(x_n)$ halmaz átmérőjét ($\text{diam } A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$). Mivel (X, d) teljes metrikus tér, kapjuk, hogy $\bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n) = x_e$. Az (1.1.16) és (1.1.20) relációkból következik, hogy $x_\varepsilon \in X$ kielégíti az (1.1.11) feltételt. Ez azt jelenti, hogy $x_n \rightarrow x_\varepsilon$, amikor $n \rightarrow \infty$.

Emellett, bármely $x \neq x_\varepsilon$ esetén tudjuk, hogy $x \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n)$, tehát létezik egy $m \in \mathbb{N}$ szám, melyre

$$f(x) + \sum_{i=0}^m \delta_i \rho(x, x_i) > f(x_m) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \rho(x_m, x_i).$$

Ugyanakkor az (1.1.15), (1.1.17), illetve (1.1.18) összefüggések alapján kijelenthetjük, hogy bármely $q \geq m$ -re

$$f(x_0) \geq f(x_m) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \rho(x_m, x_i) \geq f(x_q) + \sum_{i=0}^{q-1} \delta_i \rho(x_q, x_i) \geq f(x_\varepsilon) + \sum_{i=0}^q \delta_i \rho(x_\varepsilon, x_i).$$

Tehát fennállnak az (1.1.12)-(1.1.13) relációk.

2. eset. Az előbbihez hasonlóan járunk el. Ebben az esetben feltesszük, hogy létezik $k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\delta_k > 0$ és $\delta_j = 0$, minden $j > k \geq 0$ esetén. Ismételten az általánosság megszorítása nélkül, feltételezhetjük, hogy bármely $i \leq k$ -ra δ_i pozitív.

Ha $n \leq k$, akkor x_n -et és $T(x_n)$ -et az fentebb tárgyalt módon választjuk meg.

Ellenkező esetben, vagyis ha $n > k$, akkor $x_n \in T(x_{n-1})$ -et úgy választjuk meg, hogy teljesüljön az

$$f(x_n) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \rho(x_n, x_i) \geq \inf_{x \in T(x_{n-1})} \left[f(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \rho(x, x_i) + \frac{\delta_k \varepsilon}{2^n \delta_0} \right]$$

egyenlőtlenség és legyen

$$\begin{aligned} T(x_n) &:= \left\{ x \in T(x_{n-1}) \mid f(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \rho(x, x_i) + \delta_k \rho(x, x_n) \leq \right. \\ &\quad \left. \leq f(x_n) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \rho(x_n, x_i) \right\}. \end{aligned}$$

Az előbbiekkal analóg módon, ez esetben is ki tudjuk mutatni, hogy teljesülnek az (1.1.11), (1.1.12) feltételek. Azonban, ha $x \neq \varepsilon$, létezik egy $m > k$, melyre

$$\begin{aligned} f(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \rho(x, x_i) + \delta_k \rho(x, x_m) &> f(x_m) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \rho(x_m, x_i) \geq \\ &\geq f(x_\varepsilon) + \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i \rho(x_\varepsilon, x_i) + \delta_k \rho(x_\varepsilon, x_m), \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

vagyis az (1.1.14) reláció is teljesül. ■

1.1.3. Megjegyzés. 1) Ha az 1.1.5 tételben a következőképp választjuk meg a $\rho(y, z)$, δ_0 illetve δ_n elemeket: $\rho(y, z) = \frac{\varepsilon}{\lambda} d(y, z)$, $\delta_0 = 1$, $\delta_n = 0$, bármely $n \geq 1$ -re, akkor pontosan az Ekeland variációs elvet kapjuk vissza.

2) Az (1.5) tételben legyenek $\rho(y, z) = \frac{\varepsilon}{\lambda^p} d(y, z)^p$, $F(x_0) = \inf_{x \in X} F(x) + \varepsilon$, $\delta_0 = \mu_1 = 1 - \gamma > 0$, ahol $\gamma > 0$, illetve legyen $\delta_n = \mu_{n+1} > 0$. Ez esetben a Borwein-Preiss variációs elv egy módosított változatát kapjuk, vagyis az elv utolsó két relációját a következőkkel helyettesíthetjük:

$$f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \phi_p(x_\varepsilon) \leq f(x_0) < \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$$

illetve

$$\text{bármely } x \neq x_\varepsilon \text{ esetén } f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \phi_p(x) > F(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p} \phi_p(x_\varepsilon).$$

1.2. Erős Ekeland variációs elv és a vele ekvivalens kijelentések tárgyalása

A továbbiakban az Erős Ekeland variációs elvvel foglalkozunk, majd az alfejezet utolsó részében tanulmányozni fogjuk az Ekeland variációs elvvel egyenértékű kijelentéseket, vagyis az általános Drop tételt, valamint a Phelps lemma és a "Virágszirom" ("Flower Petal") tétel erős változatát, és igazolni fogjuk ezek ekvivalenciáját.

Először ismertetjük azon jelöléseket, melyekre szükségünk lesz az elkövetkezőkben.

Legyen E , egy $\|\cdot\|$ normával ellátott valós Banach tér. Jelöljük $B(x; r)$ -rel (illetve $B[x; r]$ -rel) az x középpontú, r sugarú nyílt (illetve zárt) gömböt, míg $x, y \in E$ esetén legyen

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}. \quad (1.2.1)$$

Az $A \subset E$ halmaz határát jelöljük $\text{bd } A$ -val.

Az $a \in E$ ponthoz és a $B \subset E$ konvex halmazhoz rendelt "drop" az $\{a\} \cup B$ halmaz konvex burkolója lesz, vagyis

$$\text{conv}(\{a\} \cup B) = D(a, B) := \{ta + (1 - t)b \mid t \in [0, 1], b \in B\}. \quad (1.2.2)$$

Végezetül az $A, B \subset E$ halmazok közötti távolságot jelölje

$$d(A, B) := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}. \quad (1.2.3)$$

1.2.1. Tétel. (Általánosított Drop tétel) Legyen A egy nemüres, zárt részhalmaza E -nek és B egy korlátos, zárt és konvex részhalmaza ugyanacsak E -nek, melyekre $d(A, B) > 0$, $s \in A$. Ekkor azt mondjuk, hogy létezik egy $a \in A \cap D(s, B)$ pont úgy, hogy $D(a, B) \cap A = a$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha a B halmaz üres, a bizonyítás triviális. Feltételezzük a továbbiakban, hogy $B \neq \emptyset$.

A bizonyítást több lépésben fogjuk végezni.

Első lépésben be fogjuk látni, hogy bármely $\varepsilon > 0$ érték és bármely $A' \subset A$, $A' \neq \emptyset$ halmaz esetén létezik $a \in A'$ úgy, hogy

$$\text{diam}(D(a, B) \cap A') \leq \varepsilon. \quad (1.2.4)$$

Tekintsük az $M = \text{diam } B + d(A', B) + 1$ halmazt és egy $0 < \delta < \min\left\{\frac{d\varepsilon}{2M}, 1\right\}$ számot. Ekkor létezik egy $a \in A'$ pont úgy, hogy

$$d(a, B) < d(A', B) + \delta.$$

Válasszunk ki egy tetszőleges z értéket a $D(a, B) \cap A'$ halmazból. Ekkor (1.2.2) alapján z a következő alakban adható meg: $z = ta + (1 - t)b$, tetszőleges $t \in [0, 1]$ és $b \in B$ -re.

Mivel konvex halmazon a távolságfüggvény is konvex, következik, hogy:

$$d(A', B) \leq d(z, B) \leq td(a, B) < td(A', B) + t\delta,$$

ahonnan eljutunk az alábbi relációkhoz:

$$1 - t < \frac{t\delta}{d(A', B)} \leq \frac{\delta}{d}$$

és a δ definícióját is felhasználva

$$\|z - a\| = (1 - t)\|a - b\| < \frac{\delta M}{d} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát $\text{diam}(D(a, B) \cap A') \leq \varepsilon$, tehát igazoltuk az (1.2.4) relációt.

Most, hogy beláttuk az (1.2.4) reláció helyességét, segítségével két sorozatot szerkesztünk meg, az $(A_i)_{i \geq 1}$ illetve az $(a_i)_{i \geq 1}$ sorozatokat úgy, hogy rendelkezzenek a következő tulajdonságokkal:

$$\text{diam } A_i < \frac{1}{i}, \quad (1.2.5)$$

$$a_i \in A_{i-1}, \quad (1.2.6)$$

$$A_i = D_i \cap A_{i-1}, \quad \text{ahol } D_i = D(a_i, B), \quad A_0 = A \cap D(s, A). \quad (1.2.7)$$

Alkalmazva a Cantor-tételt, következik, hogy $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{a\}$.

A bizonyítás következő lépéseként igazolni fogjuk, hogy ha eljelöljük $D := D(a, B)$, akkor

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = D. \quad (1.2.8)$$

Mivel $a \in D$, (1.2.5) alapján $D \subset D_i$, minden i természetes szám esetén. Ennek következtében $D \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$.

Tekintsük most az $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ elemet. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $0 \leq t_i \leq 1, b_i \in B$ esetén $x = t_i a_i + (1 - t_i) b_i$. A $(t_n)_{n \geq 1}, t_n \in [0, 1]$ sorozatnak értelmezzük azt a $(t_{n_k})_{k \geq 1}$ részsorozatát, melyre $t_{n_k} \rightarrow t$. Ekkor két esetet különböztethetünk meg:

1.eset. Ha $t = 1$, akkor $\|x - a_{i_k}\| = (1 - t)\|a_{i_k} - b_{i_k}\| \leq (1 - t_{i_k})\text{diam } D_i \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$.

2.eset. Tételezzük fel, hogy $t < 1$. Ekkor létezik olyan u szám, melyre bármely $k > u$ esetén $1 - t_{i_k} > 0$. Ez alapján és mivel B zárt, írhatjuk, hogy

$$b_{i_k} = \frac{x}{1 - t_{i_k}} - \frac{t_{i_k} a_{i_k}}{1 - t_{i_k}} \rightarrow \frac{x}{1 - t} - \frac{ta}{1 - t} =: b \in B.$$

Ennélfogva $x = ta + (1 - t)b$, vagyis $x \in D$.

Végül, mivel a $(D_i)_{i \geq 1}$ halmazsorozat csökkenő, vagyis $D_i \subset D_{i-1} \subset \dots \subset D(s, A), i \geq 2$, akkor az (1.2.7)-es összefüggés szerint

$$A_i = D_i \cap A_{i-1} = D_i \cap D_{i-1} \cap A_{i-2} = D_i \cap A_{i-2} = \dots = D_i \cap A \cap D(s, A) = D_i \cap A.$$

Felhasználva az (1.2.8)-as relációt, kapjuk, hogy

$$D \cap A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \right) \cap A = \bigcap_{i=1}^{\infty} (D_i \cap A) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{a\},$$

vagyis a bizonyításunk teljes. ■

1.2.2. Tétel. (Erős Drop tétel) Tekintsük az E Banach tér A, B részhalmazait, ahol A nemüres és zárt halmaz, míg B zárt, konvex és korlátos. Legyenek továbbá $d := d(A, B) > 0$ és $B_\varepsilon := \{x \in E \mid d(x, B) \leq \varepsilon\}$. Ekkor bármely $\varepsilon \in (0, d)$ és minden $z \in E$ -re úgy, hogy $D(z, B_\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ létezik egy $a \in A \cap D(z, B_\varepsilon)$, melyre $A \cap D(a, B) = \{a\}$ és $x_n \rightarrow a$, amikor $(x_n)_{n \geq 1} \subset D(a, B)$ illetve $d(x_n, A) \rightarrow 0$.

Bizonyítás. Felhasználjuk az előző tételt. Az $A \cup \{z\}$ és B_ε halmazok esetén létezik olyan $a \in A \cap D(z, B_\varepsilon)$, mely egyedüli eleme az $A \cap D(z, B_\varepsilon)$ halmaznak.

Tekintsük az $(x_n)_{n \geq 1} \subset K + a$ sorozatot, $x_n \neq a$, minden $n \in \mathbb{N}$ -re, melynek az A halmaztól való távolsága ($d(x_n, A)$) tart 0-hoz, ha n tart végtelenbe. Mivel az x_n sorozat minden tagja eleme a $D(a, B)$ halmaznak, ezért $x_n = t_n a + (1 - t_n)b_n$, valamely $t_n \in [0, 1)$ és $b_n \in B$ értékekre. Ugyanakkor létezik egy $y_n \in A$ úgy, hogy $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. Tekintsük az $z_n \in [x_n, y_n] \cap \text{bd}D(a, B_\varepsilon)$ pontot és a $c_n := \frac{z_n}{1 - t_n} - \frac{t_n a}{1 - t_n}$ számot. Ha c_m eleme lenne B_ε -nak valamely m természetes szám esetén, akkor $z_m \in \text{int}D(a, B_\varepsilon)$, ami pedig ellentmond a z_n pontok megválasztásának. Ez alapján elmondhatjuk, hogy $d(c_n, B) \geq \varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ -ra, valamint hogy

$$\|x_n - z_n\| = (1 - t_n)\|b_n - c_n\| \geq (1 - t_n)d(c_n, B) \geq (1 - t_n)\varepsilon, \text{ ahonnan } 1 - t_n \leq \frac{\|x_n - z_n\|}{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Ennélfogva, $\|x_n - a\| = (1 - t_n)\|b_n - a\| \leq (1 - t_n)\text{diam}D(a, B) \rightarrow 0$, tehát $x_n \rightarrow a$, amikor $n \rightarrow \infty$, épp amit igazolni szerettünk volna. ■

Az alábbiakban ismertetjük a Phelps lemma, az Ekeland variációs elv illetve a Penot "Virágszirom" tétel erősebb változatait, majd pedig bebizonyítjuk, hogy az általánosított Drop tétellel és egymással is ekvivalensek.

1.2.3. Tétel. (Phelps lemma) Tegyük fel, hogy B egy zárt, korlátos, konvex és nemüres részhalmaza E -nek, $0 \notin B$, és hogy A E -nek egy zárt részhalmaza. Ha valamely $z \in E$ -re $A \cap (K + z)$ nemüres és korlátos, ahol $K = \mathbb{R}^+ B$, akkor létezik egy $a \in A \cap (K + z)$ úgy, hogy $A \cap (K + a) = \{a\}$.

1.2.4. Tétel. (Erős Phelps lemma) Feltételezzük, hogy B az E -nek egy zárt, nemüres, korlátos és konvex részhalmaza, $0 \notin B$, illetve hogy A egy zárt, nemüres részhalmaza E -nek. Jelöljük $B_\varepsilon := \{x \in E \mid d(x, B) \leq \varepsilon\}$. Ha $\varepsilon \in (0, d(0, B))$ és $A \cap (K_\varepsilon + z)$ (ahol $K_\varepsilon = \mathbb{R}^+ B_\varepsilon$) nemüres és korlátos valamely $z \in E$ esetén, akkor létezik egy $a \in A \cap (K_\varepsilon + z)$ pont, melyre $A \cap (K + a) = \{a\}$ valamint $x_n \rightarrow a$, valahányszor $(x_n)_{n \geq 1} \subset K + a$ és $d(x_n, A) \rightarrow 0$.

1.2.5. Tétel. (Módosított erős Ekeland variációs elv) Legyen (X, d) teljes metrikus tér és $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy alulról félig folytonos függvény X -ből. Ha f alulról korlátos X -ben és nem sajátos, akkor bármely $\delta > 0, \gamma > 0$ és bármely $x_0 \in X$ esetén létezik $a \in X$ úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

- (1) $f(a) < f(x) + \gamma d(a, x)$ bármely $x \in X - re, x \neq a$,
- (2) $f(a) < f(x_0) - \gamma d(a, x_0) + \delta$,
- (3) $x_n \rightarrow a$, amikor $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ és $f(x_n) + \gamma d(a, x_n) \rightarrow f(a)$.

1.2.6. Tétel. (Erős Ekeland variációs elv) Legyen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy alulról félig folytonos, alulról korlátos függvény az (X, d) teljes metrikus térben. Tekintsük továbbá az $\varepsilon > 0$ és $x_0 \in X$ értékeket, melyekre

$$f(x_0) < \inf_{y \in X} f(y) + \varepsilon.$$

Ekkor bármely $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \gamma > 0$ esetén (amikor $\gamma \delta_1 \geq \varepsilon$) létezik olyan $a \in X$ úgy, hogy:

- (1) $f(a) < f(x) + \gamma d(a, x)$ bármely $x \in X, x \neq a$ esetén,
- (2) $d(a, x_0) < \delta_1 + \delta_2$,
- (3) $x_n \rightarrow a$, ha $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ és $f(x_n) + \gamma d(a, x_n) \rightarrow f(a)$.

Könnyű belátni, hogy az 1.2.6-os tétel az 1.2.5-ös tétel egy következménye, hiszen ha az 1.2.5-ös tétel (2)-es alpontjában δ -t $\delta_2 \gamma$ -val helyettesítjük, akkor kapjuk, hogy

$$d(a, x_0) < \frac{f(x_0) - f(a)}{\gamma} + \delta_2 \leq \frac{\varepsilon}{\gamma} + \delta_2 \leq \delta_1 + \delta_2,$$

ami pedig pontosan az 1.2.6-os tétel (2)-es alpontjával egyezik meg.

Az ú.n. "szirom" fogalmát Penot vezette be. A $P_\gamma(a, b)$ "szirom" a $\gamma > 0$ és az $a, b \in X$ elemek esetén a

$$P_\gamma(a, b) = \{x \in X \mid \gamma d(a, x) + d(x, b) \leq d(a, b)\} \quad (1.2.9)$$

halmaznak felel meg. Ugyancsak Penot igazolta, hogy a "Virágszirom tétel" egyenértékű Ekeland variációs elvével illetve a Drop tétellel.

Hasonlóan értelmezhetjük a "szírom" fogalmát függvények esetén is. Ekkor az (X, d) metrikus térben az $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén a $P_{\gamma, \delta}(a, f) := \{x \in X \mid \gamma d(a, x) + f(x) \leq f(a) + \delta\}$ halmazt a $\gamma > 0, \delta \geq 0, a \in X$ és f -hez társított "szíromnak" nevezzük. Látható, hogy ha $b \in X$ -re $f(\cdot) = d(\cdot, b)$, akkor a $P_{\gamma, 0}(a, f)$ megfelel a $P_{\gamma, \delta}(a, f)$ "szíromnak".

1.2.7. Tétel. (Erős "Virágszirom" tétel) Legyen (X, d) teljes metrikus tér, A zárt részhalmaza X -nek, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy Lipshitz, alulról korlátos függvény az A halmazon. Emellett legyenek $\delta > 0, \gamma > 0$ és $x_0 \in A$ számok. Ekkor létezik egy olyan $a \in A \cap P_{\gamma, 0}(x_0, f)$ elem, melyre:

$$(1) P_{\gamma, 0}(a, f) \cap A = \{a\}, \text{ és}$$

$$(2) x_n \rightarrow a, \text{ amikor } (x_n)_{n \geq 1} \subset P_{\gamma, 0}(a, f) \text{ és } d(x_n, A) \rightarrow 0.$$

Most pedig térjünk rá annak igazolására, hogy a fentiekben bemutatott kijelentések egyenértékűek.

Az $(E, \|\cdot\|)$ normált téren legyen

$$K(x, B) := \{z \in E \mid z = x + t(b - x), t \geq 0, b \in B\} \quad (1.2.10)$$

az $x \notin B$ pont és a B halmaz által generált kúp.

1.2.8. Tétel. Az általánosított Drop tételből következik a Phelps lemma.

Bizonyítás. Használjuk a Phelps lemmában szereplő jelöléseket. Mivel $A \cap (K + z)$ korlátos, következik, hogy létezik olyan $r > 0$ szám úgy, hogy $A \cap (K + z) \subset B(z; r)$. Tekintsük most a $t_0 = \frac{2r}{d(0, B)}$ pontot, illetve a $C = z + t_0 B$ halmazt. Ekkor $d(z, C) = t_0 d(0, B) = 2r$, ahonnan világosan látszik, hogy $d(C, A \cap (K + z)) \geq r$. Továbbá, könnyű belátni azt is, hogy K zárt. Ilyenformán alkalmazhatjuk az 1.2.1 tételt a C és $A \cap (K + z)$ halmazokra. Következésképp, létezik egy $a \in A \cap (K + z)$ pont, melyre

$$A \cap (K + z) \cap D(a, C) = \{a\}. \quad (1.2.11)$$

Igazolni fogjuk, hogy

$$a + K \subset K(a, C). \quad (1.2.12)$$

Válasszuk meg a $t_1 \geq 0$ és $b_1 \in B$ pontokat úgy, hogy $a - z = t_1 b_1$, illetve $t_1 d(0, B) \leq t_1 \|b_1\| = \|a - z\| < r$. Ez utóbbiból következik, hogy $t_1 < t_0$, hiszen $t_1 < \frac{r}{d(0, B)} < \frac{2r}{d(0, B)} = t_0$.

Következő lépésben, tekintsük az $x \in a + K$ tetszőleges pontot és válasszuk t_3 -at $t_0 - t_1$ -nek. Az előbbi lépéshez hasonlóan kiválasztunk két pontot, $t_2 \geq 0$ és $b_2 \in B$ -t, melyekre $x - a = t_2 b_2$

és a b_3 pontot úgy, hogy $b_3 := \frac{t_1 b_1}{t_0} + \frac{t_3 b_2}{t_0} \in B$. Jelöljük s -sel a $\frac{t_2}{t_3}$ törtet. A fenti összefüggéseket felhasználva, kapjuk, hogy

$$x = a + t_2 b_2 = a + s t_3 b_2 = a + s(t_0 b_3 - t_1 b_1) = a + s(t_0 b_3 + z - a).$$

Az (1.2.10)-es összefüggésből azonnal következik, hogy $x \in K(a, C)$. Tudjuk továbbá, hogy $B(z; r) \cap C = \emptyset$, tehát

$$B(z; r) \cap K(a, C) = B(z; r) \cap D(a, C),$$

ahonnan az (1.2.12) alapján

$$(K + a) \cap B(z; r) \subset K(a, C) \cap B(z; r) = B(z; r) \cap D(a, C).$$

Végezetül, mivel $a \in K + z$ és K egy kúp, következik, hogy $K + a \subset K + z$, ezáltal az (1.2.11)-es reláció szerint

$$\begin{aligned} (K + a) \cap A &= (K + a) \cap (K + z) \cap A \cap B(z; r) \subset B(z; r) \cap D(a, C) \cap (K + z) \cap A = \\ &= \{a\}, \end{aligned}$$

vagyis épp amit bizonyítani akartunk. ■

1.2.9. Tétel. *A Phelps lemmából következik az Erős Phelps lemma.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonlóan történik, mint azt az 1.2.2 tétel esetében láttuk. Tekintsük jelen esetben az Erős Phelps lemmában megadott jelöléseket.

Könnyű belátni, hogy K_ε és B_ε zártak. Ez alapján a Phelp lemmából azonnal adódik, hogy létezik olyan $a \in (K_\varepsilon + z) \cap A$ pont úgy, hogy

$$A \cap (K_\varepsilon + z) \cap (K_\varepsilon + a) = \{a\}.$$

Mivel K_ε egy kúp és az a pont eleme $K_\varepsilon + z$ -nek, nyilvánvaló, hogy $K_\varepsilon + a \subset K_\varepsilon + z$. Tehát $A \cap (K_\varepsilon + a) = \{a\}$.

Vegyük az $(x_n)_{n \geq 1} \subset K + a, x_n \neq a$ sorozatot, melyre $d(x_n, A) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Mivel $x_n \in K + a$ minden $n \geq 1$ -re, írhatjuk, hogy $x_n = a + t_n b_n$, valamely $t_n > 0$ és $b_n \in B$ értékekre. Másrészt, létezik az $y_n \in A$ pont úgy, hogy $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. Legyenek a $z_n \in [x_n, y_n] \cap bd(K_\varepsilon + a)$ és $c_n := \frac{z_n - a}{t_n}$ pontok. Ha valamely m természetes számra c_m eleme lenne B_ε -nak, akkor $z_m \in \text{int}(K_\varepsilon + a)$, ami pedig ellentmond a z_n pontok megválasztásának. Ennek következtében kijelenthetjük, hogy $d(c_n, B) \geq \varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, valamint hogy

$$\|x_n - z_n\| = t_n \|b_n - c_n\| \geq t_n \varepsilon, \text{ ahonnan } t_n \geq \frac{\|x_n - z_n\|}{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Ennélfogva, $\|x_n - z_n\| = \|t_n\|b_n\| \geq t_n \text{diam}\{B \cup \{0\}\} \rightarrow 0$, tehát $x_n \rightarrow a$, amikor $n \rightarrow \infty$. ■

Mielőtt rátérnénk az Erős Phelps lemma, illetve a Módosított Erős Ekeland variációs elv közötti kapcsolat tárgyalására, szükségünk van a következő jelölésekre.

Legyen $E_1 := E \times \mathbb{R}$ lineáris tér, melyet a következő normával ruházunk fel:

$$\|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)\| = \max \{\|x_1 - x_2\|, |t_1 - t_2|\}.$$

Ezt a normát "max" normának is szokás nevezni.

Jelöljük továbbá B_r és $B_{r,\delta}$ -rel a következő gömböket:

$$B_r = \{(x, 0) \in E_1 : \|x\| \leq r\}; \quad \text{illetve}$$

$$B_{r,\delta} = \{(x, t) \in E_1 : d_1((x, t), B_r) \leq \delta\}, \quad \text{ahol } d_1((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = \|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)\|.$$

Az alábbiakban két tételt ismertetünk, melyeknek fontos szerepük lesz annak igazolásakor, hogy a Módosított erős Ekeland variációs elv az Erős Phelps lemmából származtatható.

1.2.1. Lemma. *Bármely $r, s, \varepsilon > 0$ esetén létezik egy δ pozitív érték, melyre*

$$K((0, s), B_{r,\delta}) \subset K((0, s), B_{r+\varepsilon}).$$

1.2.10. Tétel. (Kuratowski-Wojdyslawski beágyazási tétel) *Azt mondjuk, hogy minden (X, d) metrikus tér esetén létezik egy (Y, s) normált és teljes vektortér és egy $h : X \rightarrow Y$ ú.n. beágyazás, melyre $h(X)$ zárt részhalmaza lesz $K = \text{conv}(h(X))$ -nak.*

1.2.11. Tétel. *Az Erős Phelps lemmából következik a Módosított erős Ekeland variációs elv.*

Bizonyítás. A bizonyítás során az 1.2.5 tételben szereplő jelöléseket fogjuk használni.

A legegyszerűbb eset, amikor $f(x_0) = \inf_{y \in X} f(y)$. Ekkor ugyanis $a := x_0$ eleget tesz az 1.2.5 tétel mindhárom feltételének. Épp ezért, tételezzük fel a továbbiakban, hogy $f(x_0) > \inf_{y \in X} f(y)$.

A következőképp gondolkozunk: d -ről be szeretnénk látni, hogy korlátos, hisz ekkor alkalmazhatjuk a Kuratowski-Wojdyslawski beágyazási tételt. Ezért ha a d metrikát kicseréljük a $d' := \min\{s, d\}$ metrikára, ahol $s = \frac{1}{\gamma}(f(x_0) - \inf_{y \in X} f(y))$, akkor a d' metrika kielégíti mindhárom feltételt, így a d metrika is ki fogja elégíteni.

Alkalmazhatjuk tehát a beágyazási tételt. Ekkor elmondhatjuk, hogy az (X, d) metrikus tér izometrikusan beágyazható egy E Banach-térbe, például azon X -ben korlátos, az $x \mapsto d_x$, szupré-mum normával felruházott függvények Banach-terébe, ahol $d_x(y) = d(x, y)$, $x, y \in X$ esetén.

Ezáltal feltételezhetjük, hogy X az $E(\|\cdot\|)$ Banach-tér egy korlátos részhalmaza. A feltevésből tudjuk, hogy f alulról félig folytonos és X korlátos. Az 1.1.1 tétel alapján tehát kijelenthetjük, hogy

$\text{epi } f$ egy zárt részhalmaza $E_1 := E \times \mathbb{R}$ -nek, a "max" normával. Feltételezhetjük továbbá, hogy $0 < \delta < \gamma \text{diam } X$. Legyenek az $\varepsilon > 0$, $d = \frac{\varepsilon}{\gamma}$, illetve $0 < \delta_1 > \frac{\delta d}{\gamma \text{diam } X - \delta}$ pontok, és tekintsük a következő halmazokat:

$$B_1 = \{(x, -\varepsilon) \in E_1 \mid \|x\| \leq d + \delta_1\}, \quad K_1 = K(0, B_1)(= \mathbb{R}^+ B_1),$$

$$B_2 = \{(x, -\varepsilon) \in E_1 \mid \|x\| \leq d\}, \quad K_2 = K(0, B_2)(= \mathbb{R}^+ B_2).$$

Ekkor az 1.2.1 lemma értelmében létezik egy $\delta_2 > 0$ úgy, hogy

$$K_3 := \mathbb{R}^+ \{(x, t) \in E_1 \mid d_1((x, t), B_2) \geq \delta_2\} \subset K_1.$$

Igazolni fogjuk, hogy van olyan $t_0 \in \mathbb{R}$ szám, melyre $((x_0, t_0) + K_2) \cap \text{epi } f \neq \emptyset$. Ha $f(x_0) < +\infty$, válasszuk t_0 -t $f(x_0)$ -nak. A továbbiakban tételezzük fel, hogy $f(x_0) = +\infty$. Mivel f sajátos, ezért biztosan léteznie kell egy $x_1 \in X$ elemnek, melyre $f(x_1) < +\infty$. Válasszunk egy λ_1 pozitív számot, melyre $\lambda_1 \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{d}$ és tekintsük a $z_1 = \frac{x_1 - x_0}{\lambda_1}$ és $t_0 = f(x_1) + \lambda_1 \varepsilon$ pontokat. Ekkor $(x_1, f(x_1)) = (x_0, t_0) + \lambda_1(z_1, -\varepsilon)$ és $\|z_1\| \leq d$, ami azt mutatja, hogy $(x_1, f(x_1)) \in (x_0, f(x_0)) + K_2$. Továbbá könnyen igazolható, hogy $((x_0, t_0) + K_1) \cap \text{epi } f$ E_1 -nek korlátos részhalmaza. Valóban, ha az (x_2, t_2) számpár eleme $((x_0, t_0) + K_1) \cap \text{epi } f$ -nek, akkor felírható a következő alakban: $(x_2, t_2) = (x_0, t_0) + \lambda_2(z_2, -\varepsilon)$, ahol $t_2 \geq f(x_2)$, $\|z_2\| \leq d + \delta_1$ és $\lambda_2 \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\inf_{y \in X} f(y) < f(x_2) \leq t_2 = t_0 - \lambda_2 \varepsilon \leq t_0,$$

és

$$x_2 \leq \|x_0\| + \lambda_2 \|z_2\| \leq \|x_0\| + \frac{(t_0 - t_2)(d + \delta_1)}{\varepsilon} \leq \|x_0\| + \frac{(t_0 - \inf_{y \in X} f(y))(d + \delta_1)}{\varepsilon} =: t_3.$$

Következésképp $\|(x_2, t_2)\| \leq \max\{t_0, t_3\}$.

Alkalmazhatjuk az Erős Phelps lemmát: létezik tehát egy olyan $(a, \alpha) \in ((x_0, t_0) + K_3) \cap \text{epi } f \subset ((x_0, t_0) + K_1) \cap \text{epi } f$ úgy, hogy

(i) $((a, \alpha) + K_2) \cap \text{epi } f = \{(a, \alpha)\}$ és

(ii) $w_n \rightarrow (a, \alpha)$, ahol $(w_n)_{n \geq 1} \subset (a, \alpha) + K_2$ és $d_1(w_n, \text{epi } f) \rightarrow 0$.

Nyilvánvaló, hogy $\alpha = f(a)$. Ez alapján az (i) feltétel a következőképp alakul: $(a, f(a)) = (x_0, t_0) + p(y, -\varepsilon)$, ahol $p \geq 0$, $\|y\| \leq d + \delta_1$. Más szóval, $a = x_0 + py$ és $f(a) = t_0 - p\varepsilon$. Ha $y = 0$, válasszuk $a = x_0$. Észrevehetjük, hogy ekkor teljesül az 1.2.5 tétel (2)-es feltétele. Tételezzük fel most, hogy $y \neq 0$. Ekkor végigoszthatunk $y - al$, és kapjuk, hogy

$$p = \frac{a - x_0}{y} \frac{\|a - x_0\|}{\|y\|} \geq \frac{\|a - x_0\|}{d + \delta_1}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} f(a) &= t_0 - p\varepsilon \leq t_0 - \frac{\|a - x_0\|\varepsilon}{d + \delta_1} \leq f(x_0) - \frac{d\gamma\|a - x_0\|}{d + \delta_1} \leq \\ &\leq f(x_0) - \gamma\|a - x_0\| + \frac{\delta_1\gamma\text{diam } X}{d + \delta_1} < f(x_0) - \gamma\|a - x_0\| + \delta. \end{aligned}$$

Látható, hogy pontosan az 1.2.5 tétel (2)-es feltételét kaptuk meg.

Ki szeretnénk mutatni továbbá, hogy valamely a pont eleget tesz e tétel (1)-es feltételének. Legyen $a \neq x \in X$. Jelöljük $\lambda := \frac{\|a - x_0\|}{d}$, $z := \frac{x - a}{\lambda}$, $t := f(a) - \lambda\varepsilon$. Innen $\|z\| = d$ és $(x, t) = (a, f(a)) + \lambda(z, -\varepsilon)$, amiből kitűnik, hogy $(x, t) \in (a, f(a)) + K_2$. Az (i) feltétel értelmében következik, hogy $(x, t) \notin \text{epi } f$, vagyis $f(x) > t = f(a) - \lambda\varepsilon = f(a) - \gamma\|a - x\|$, mely a Módosított erős Ekeland variációs elv (1)-es feltételével egyezik meg.

Nem maradt más hátra, mint a (3)-as feltétel teljesülésének vizsgálata az 1.2.5 tétel esetén. Hasonlóan járunk el, mint az előző lépésben. Tekintsük az $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$, $x_n \neq a$ sorozatot, melyre $f(x_n) + \gamma\|a - x_n\| \rightarrow f(a)$. Továbbá, válasszuk meg a λ_n , z_n és t_n számokat: $\lambda_n := \frac{\|a - x_n\|}{d}$, $z_n := \frac{x_n - a}{\lambda_n}$, $t_n = f(a) - \lambda_n\varepsilon$. Látható, hogy $\|z_n\| = d$ és $(x_n, t_n) = (a, f(a)) + \lambda_n(z_n, -\varepsilon)$. Ez alapján $(x_n, t_n) \in (a, f(a)) + K_2$ és

$$f(x_n) - t_n = f(x_n) - f(a) + \lambda_n\varepsilon = f(x_n) - f(a) + \frac{\varepsilon\|a - x_n\|}{d}.$$

Nyilvánvaló, hogy ha $n \rightarrow \infty$, akkor $f(x_n) - t_n \rightarrow 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy $d_1((x_n, t_n), \text{epi } f) \rightarrow 0$, ahonnan (ii) alapján kapjuk, hogy $(x_n, t_n) \rightarrow (a, f(a))$, amikor $n \rightarrow \infty$; tehát a bizonyítás teljes.

■

1.2.12. Tétel. *A Módosított erős Ekeland variációs elvből következik az Erős "Virágszirom" tétel.*

Bizonyítás. Vegyük át az (1.2.7.) tételben definiált jelöléseket. Az 1.2.5 variációs elvet alkalmazva, létezik egy $a \in A$ pont, melyre:

- (1) $f(a) < f(x) + \gamma d(a, x)$ bármely $x \in A - ra$, $x \neq a$,
- (2) $f(a) < f(x_0) - \gamma d(a, x_0) + \delta$,
- (3) $x_n \rightarrow a$, amikor $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$ és $f(x_n) + \gamma d(a, x_n) \rightarrow f(a)$.

Az első feltétel azt mutatja, hogy minden x elemre $A \setminus \{a\}$ -ből x nem lesz eleme a $P_{\gamma,0}(a, f)$ halmaznak. Másrészt, a (2)-es feltétel alapján az a pont a $P_{\gamma,0}(a, f)$ halmaz egy eleme. Következik, hogy a $P_{\gamma,0}(a, f) \cap A$ halmaznak egyetlen eleme lehet, mégpedig maga az a pont. Tehát a "Virágszirom" tétel első feltételét igazoltuk.

Már csak a második feltételt kellene belátnunk. Ehhez tekintsük az $(x_n)_{n \geq 1} \subset P_{\gamma,0}(a, f)$ sorozatot, melyben a tagok távolsága az A halmaztól tartson 0-hoz (vagyis $d(x_n, A) \rightarrow 0$), ha n tart végtelenbe. Ekkor azt mondhatjuk, hogy létezik $a_n \in A$ úgy, hogy $d(x_n, a_n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, majd az (1)-es feltételt felhasználva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma d(a, a_n) + f(a_n) - f(a) \leq \gamma d(a, x_n) + \gamma d(x_n, a_n) + f(a_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(a) \leq \\ &\leq \gamma d(x_n, a_n) + f(a_n) - f(x_n) \leq \gamma d(x_n, a_n) + Ld(a_n, x_n) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ahol L az f függvény Lipshitz-állandója. Innen pedig már könnyű belátni, hogy $x_n \rightarrow a$, ha $n \rightarrow \infty$. Valóban, a harmadik feltételből adódik, hogy $a_n \rightarrow a$, azonban tudjuk, hogy $d(x_n, A) \rightarrow 0$, tehát x_n csakis a -hoz konvergálhat. ■

1.2.13. Tétel. Az Erős "Virágszirom" tételből következik az általánosított Drop tétel.

Bizonyítás. Legyen most $X = E$ egy Banach-tér, és tekintsük az f konvex függvényt valamint az $A, B \subset X$ halmazokat; B zárt, konvex és korlátos. Továbbá válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket, illetve a $k_1 := \sup_{y \in B} f(y)$, $k_2 := \inf_{y \in A} f(y)$ és $0 < \gamma < \frac{k_2 - k_1}{d + \varepsilon + \text{diam } B}$ számokat. Az egyszerűség kedvéért jelöljük d -vel a $d(A, B) > 0$ távolságot. Így $a \in A$ esetén $d(a, B) < d + \varepsilon$.

Be fogjuk látni, hogy

$$D(a, B) \subset P_{\gamma,0}(a, f). \quad (1.2.13)$$

Ennek érdekében tekintsük a $z \in D(a, B)$ pontot. Ekkor $z = ta + (1 - t)b$ valamely $t \in [0, 1]$ és $b \in B$ -re. Másrészt tudjuk, hogy a $D(a, B)$ halmaz konvex. Tehát:

$$\begin{aligned} \gamma d(a, z) + f(z) &\leq \gamma(1 - t)\|a - b\| + tf(a) + (1 - t)f(b) = (1 - t)(\gamma\|a - b\| + f(b)) + tf(a) \leq \\ &\leq (1 - t)[\gamma(d(a, B) + \text{diam } B) + f(b)] + tf(a) < \\ &< (1 - t)[\gamma(d + \varepsilon + \text{diam } B)) + k_1] + tf(a) < \\ &< (1 - t)k_2 + tf(a) \leq (1 - t)f(a) + tf(a) = f(a), \end{aligned}$$

A "szirom" értelmezése alapján $z \in P_{\gamma,0}(a, f)$. Tehát az (1.2.13) állításunk igaz.

Ha $f(\cdot)$ -et $d(\cdot, B)$ -nek választjuk, akkor f Lipshitz-tulajdonságú lesz. Ez esetben tehát alkalmazható az tétel. Nekünk csak az első feltételre van szükségünk: létezik egy $a \in A \cap P_{\gamma,0}(x_0, f)$ szám, melyre $P_{\gamma,0}(a, f) \cap A = \{a\}$. Beláttuk azonban, hogy $D(a, B) \subset P_{\gamma,0}(a, f)$, ahonnan következik, hogy $D(a, B) \cap A = \{a\}$, pontosan amit bizonyítani akartunk. ■

2. Paraméterezett Ekeland variációs elv és alkalmazásai

Ebben a fejezetben az Ekeland variációs elv paraméterezett változatát tárgyaljuk, valamint kitérünk e két elv egy-egy alkalmazásának bemutatására is.

Mielőtt azonban rátérnénk mindezekre, definiáljuk a következő fogalmakat.

2.1. Értelmezések. Paraméterezett Ekeland variációs elv.

Az első fejezetben értelmeztük az alulról félig folytonosság fogalmát egy pontban egyértékű függvények esetén. Most nézzük meg, mit is takar ez a tulajdonság többértékű függvények esetén!

2.1.1. Értelmezés. Legyen T egy topológikus-, míg (X, d) egy metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $F : T \rightarrow 2^X$ többértékű függvény alulról (illetve felülről) félig folytonos az x_0 pontban, ha bármely $V \supset F(x_0)$ nyílt halmaz (illetve bármely V nyílt, $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$ halmaz) esetén létezik egy U nyílt halmaz - mely tartalmazza x_0 -t is - úgy, hogy bármely $x \in U$ -ra $F(x) \subset V$ (illetve $F(x) \cap V \neq \emptyset$)).

Ismerkedjünk meg a Hausdorff alulról-, illetve felülről félig folytonosság fogalmával is. (Egy pontban Hausdorff folytonos többváltozós függvényeket az alábbi állítással jellemezhetjük:

2.1.2. Értelmezés. Tekintsük a T topológikus-, és az (X, d) metrikus teret. Az $F : T \rightarrow 2^X$ többértékű függvény akkor és csak akkor Hausdorff felülről félig folytonos az x_0 pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számra létezik egy $U \supset x_0$ nyílt halmaz úgy, hogy $F(x) \subset \{z \in X \mid \text{dist}(z, F(x_0)) < \varepsilon\}$, minden $x \in U$ esetén, ahol $\text{dist}(\cdot, A)$ alatt az A halmaztól való távolságot értjük.

Hasonlóan, az F függvényt Hausdorff felülről félig folytonosnak nevezzük az x_0 pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számra létezik egy $U \supset x_0$ nyílt halmaz úgy, hogy minden $x \in U$ pontra $F(x) \subset \{z \in X \mid \text{dist}(z, F(x)) < \varepsilon\}$.

2.1.1. Megjegyzés. Ha az F többértékű függvény Hausdorff alulról és felülről félig folytonos az x_0 pontban, akkor Hausdorff folytonos x_0 -ban.

Jelöljük továbbá K -val az $(E, \|\cdot\|)$ Banach-téren zárt és konvex kúpot. Azt mondjuk, hogy K "erősen pontozott kúp", ha létezik olyan $l \in B^*$ (ahol B^* -al jelöltük a zárt egységgömböt az $(E^*, \|\cdot\|)$ duális téren) úgy, hogy

$$\sup_{y \in K} l(y) = 0 \quad \text{és} \quad c_n \rightarrow 0, \text{ amikor } (c_n)_{n \geq 1} \text{ és } l(c_n) \rightarrow 0. \quad (2.1.1)$$

2.1.3. Értelmezés. Definiáljuk a következő halmazokat:

(1) Az összes hatékony Z -beli pontok halmaza: $EP_K(Z) = \{z \in Z \mid (z + K) \cap Z = \{z\}\}$.

(2) A $Z \subset E$ halmaz K -ra vonatkozó "gyengén hatékony" pontjainak $WEP_K(Z)$ halmazát a

$$WEP_K(Z) = \{z \in Z \mid \text{int}(z + K) \cap Z = \emptyset\}$$

összefüggéssel értelmezzük.

(3) A $Z \subset E$ halmaz K -ra vonatkozó "erősen hatékony pontjainak" összességét $SEP_K(Z)$ -vel jelöljük, ahol

$$SEP_K(Z) = \{y \in Z \mid (y + K) \cap Z = \{y\} x_n \rightarrow u(x_n)_{n \geq 1} \subset (y + K) \text{dist}(x_n, Z) \rightarrow 0\}$$

Azt mondjuk, hogy $Z \subset E$ "erősen korlátos" a K -ra vonatkozóan, ha létezik a $z \in Z$ pont és az $\varepsilon > 0$ szám úgy, hogy $(z + K) \cap (Z + \varepsilon K)$ halmaz korlátos.

A fenti definícióból kiindulva kijelenthetjük a következő állítást:

2.1.4. Értelmezés. Legyen K egy "erősen pontozott" konvex kúp, melynek a belseje nem üres. Ha a Z halmaz konvex és "erősen korlátos" a K -ra vonatkozóan, akkor minden $y \in E$ pont és minden ε pozitív érték esetén az $(y + K) \cap (Z + \varepsilon K)$ halmaz korlátos lesz.

Az alábbiakban ismertetjük a Phelps lemma (1.8. tétel) paraméterezett változatát, mely tulajdonképpen egy szelekciós tétel többértékű, konvex képekkel rendelkező függvényekre, azonban szükségünk lesz ezen eredményre a paraméterezett Ekeland variációs elv vizsgálatakor.

2.1.1. Tétel. Tekintsük az X parakompakt topologikus téren az $F : X \rightarrow 2^E$ Hausdorff folytonos, többértékű konvex, zárt és nemüres képekkel rendelkező függvényt, K pedig legyen egy "erősen pontozott" kúp, melynek belseje nem üres. Feltételezzük továbbá, hogy $F(x)$ "erősen korlátos" függvény a K -ra vonatkozóan, minden $x \in X$ -re. Ekkor kijelenthetjük, hogy a $WEP_K(F(\cdot))$ többértékű leképezésnek van folytonos szelekciója. Mitöbb, ha $y' : X \rightarrow E$ egy folytonos szelekciója F -nek, akkor létezik egy szelekciója az $(y'(x) + K) \cap WEP_K(F(x))$ többértékű leképezésnek is.

Továbbá, ha bármely $x \in X$ esetén $F(x)$ erősen korlátos a K_ε -ra vonatkozóan, ahol $K_\varepsilon = \bigcup \{\overline{\lambda K \cap B + \varepsilon C} : \lambda \geq 0\}$ (B -vel itt az egység körlapot jelöltük), akkor az $(y'(x) + K_\varepsilon) \cap SEP_K(F(x))$ többértékű leképezésből kiválasztható egy folytonos szelekció.

Az alábbi tétel az Ekeland variációs elv egy paraméterezett változata.

2.1.2. Tétel. (Paraméterezett Ekeland variációs elv) Legyen X egy parakompakt topologikus tér, míg E egy Banach-tér, és tekintsük E -nek egy zárt és konvex részhalmazát, melyet jelöljünk Y -al. Legyen továbbá az $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) az $\{f(\cdot, y) : y \in Y\}$ függvények ekvifolytonosak,

(2) az $f(x, \cdot)$ függvény konvex és alulról félig folytonos, minden $x \in X$ -re,

(3) $\inf_{y \in Y} f(x, y) > -\infty$, bármely $x \in X$ esetén.

Ekkor

(4) bármely $\varepsilon > 0$ -ra létezik egy $y_0 : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés úgy, hogy

$$f(x, y_0(x)) = \min_{y \in Y} [f(x, y) + \varepsilon \|y - y_0(x)\|], \text{ minden } x \in X\text{-re.}$$

Mitöbb, ha f -et folytonosnak választjuk, akkor f -re érvényes lesz az alábbi lokális tulajdonság:

(4') bármely $y' : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés esetén, minden $\varepsilon > 0, \lambda > 0, \delta \in (0, \varepsilon)$ -ra létezni fog az $y_0 : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés úgy, hogy

$$f(x, y_0(x)) = \min_{y \in Y} \left[f(x, y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|y - y_0(x)\| \right], \text{ minden } x \in X \text{ esetén, és} \quad (2.1.2)$$

(5) $\|y'(x) - y_0(x)\| < \lambda$, amikor $f(x, y'(x)) < \inf_{x \in X} f(x, x) + \varepsilon - \delta$,

(6) a (4') tulajdonság esetén $y_0(x)$ lesz az erős minimumpont minden $x \in X$ -re, ami nem jelent mást, mint hogy a (4') esetben minden minimalizációs sorozat konvergens.

Bizonyítás. Vegyük a következőképp értelmezett K kúpot $E \times \mathbb{R}$ -ből:

$$K = \{(x, -t) \mid t \geq 0, t\lambda \geq (\varepsilon - \delta)\|x\|\}.$$

Könnyen igazolható, hogy az $F(x) = \text{epi } f(x, \cdot) := \{(y, t) \in E \times \mathbb{R} \mid t \geq f(x, y)\}$ többértékű függvény Hausdorff folytonos és hogy a (4') feltételben az $s : X \rightarrow Y \times \mathbb{R}$, $s(x) = (y'(x), f(x, y'(x)))$ folytonos szelekciója F -nek. Ekkor az előző tételből azonnal következik, hogy az $(s(\cdot) + K) \cap WEP_K(F(\cdot))$ leképezésnek létezik egy (y_0, r_0) szelekciója, ahol $r_0(x) = f(x, y_0(x))$. Tehát, minden $x \in X$ esetén $\text{int}(y_0(x), r_0(x) + K) \cap \text{epi } f(x, \cdot) = \emptyset$, ami pedig pontosan a (2.1.2)-t igazolja. Emellett, az (5)-ös tulajdonság az $y_0(x), r_0(x) \in (s(x) + K)$ feltételből adódik.

Tekintsük most az $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ minimalizációs sorozatot a $g_2(x, \cdot)$ függvény esetén, ahol $g_2(x, y) = f(x, y) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|y - y_0(x)\|$. Válasszuk meg $g_1(x, \cdot)$ -t a következőképpen: $g_1(x, y) = f(x, y) + \frac{\varepsilon - \delta}{\lambda} \|y - y_0(x)\|$. Innen kapjuk, hogy $f(x, y_0(x)) \leq g_1(x, y_n) < g_2(x, y_n) \rightarrow f(x, y_0(x))$. Világos tehát, hogy $g_2(x, y_n) - g_1(x, y_n) \rightarrow 0$, vagyis $\delta \|y_n - y_0(x)\| \rightarrow 0$, és így a (6)-os tulajdonság is teljesült. ■

2.2. Az Ekeland-, és a Paraméterezett Ekeland variációs elvek alkalmazásai a Nash-egyensúlypontok elméletében

A *Nash-egyensúly*nak a játékelméletben fontos szerepe van: egy n -szereplős játékban – melyben a játékosok ismerik egymás stratégiáját és az ezekhez tartozó hasznosságokat – Nash-egyensúlynak nevezzük a játékosok azon stratégiáinak halmazát, mellyel minden játékos a lehető legjobban jár a többi játékos stratégiáját és azok kifizetődését figyelembe véve. Az egyik legismertebb ilyen játék a fogolydilemma.

Ebben az alfejezetben az Ekeland-, illetve a Paraméterezett Ekeland variációs elvek egy-egy alkalmazását mutatjuk be a Nash-egyensúlyelméletben. Először azonban definiálnunk kell a Nash-egyensúlypont fogalmát.

2.2.1. Értelmezés. Egy n -szereplős játék ($n \geq 2$) esetén tekintsük az $X_1, X_2, \dots, X_n, n \geq 2$ nemüres stratégiahalmazokat, illetve az $f_i : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ hasznosságfüggvényeket. Jelöljük továbbá $X := \prod_{i=1}^n X_i, x := (x_1, \dots, x_n)$.

Egy $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ pontot **Nash-egyensúlypontnak** nevezzük, ha

$$f_i(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n) \geq f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

bármely $x_i \in X_i, i = \overline{1, n}$ stratégiára.

A legismertebb, Nash-egyensúlypont létezésére vonatkozó tétel természetesen Nash-től származik és a következőképp hangzik.

2.2.1. Tétel. Tekintsük a fenti értelmezésben megadott jelöléseket. Legyenek ekkor az $X_1, X_2, \dots, X_n$ halmazok egy Hausdorff topologikus vektortér nemüres, kompakt és konvex részhalmazai, és tekintsük az $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ folytonos függvényeket, melyekre az $x_i \in X_i \mapsto f_i(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n)$ leképezés kvázikonvex minden rögzített $\bar{x}_j \in X_j (j \neq i)$ stratégiapontra nézve. Ekkor létezni fog egy Nash-egyensúlypont az (f, X) rendszerre vonatkozóan.

Az alábbi tételben ugyancsak a Nash-egyensúlypont létezését mutatjuk ki, azonban a bizonyítás során felhasználjuk a Paraméterezett Ekeland variációs elvet. Ez esetben is a 2.2.1.-es értelmezésben megadott jelölésekkel dolgozunk.

2.2.2. Tétel. Legyenek az $X_2, \dots, X_n$ nemüres, konvex, kompakt részhalmazai egy Banach-térnek, és az X_1 konvex, korlátos, zárt és nemüres részhalmaza ugyanacsak egy Banach-térnek. Jelöljük továbbá $X_{\hat{i}} := X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$, bármely $i = 1, \dots, n$ esetén. Tekintsük az $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex és az $x_{\hat{i}}$ pontokban alulról félig folytonos függvényeket. Emellett legyenek az $\{f_i(\dots, x_i, \dots) : x_i \in$

$X_i\}$ függvények ekvifolytonosak az $X_{\hat{i}}$ halmazokon, minden $i = \overline{1, n}$ -re. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ értékre létezik egy $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ pont, mely egy Nash-egyensúlyi pont az $f_i(x) + \varepsilon\|x_i - \bar{x}_i\|, i = 1, \dots, n$ függvényekre nézve, vagyis

$$f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq f_i(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n) + \varepsilon\|x_i - \bar{x}_i\|, \text{ minden } x_i \in X_i, i = \overline{1, n}\text{-re.}$$

A bizonyítás során fel fogjuk használni a Schauder-féle fixpont tételt, ezért most kitérünk ezen tételre is.

2.2.3. Tétel. (Schauder-féle fixpont tétel) Legyen X egy zárt és konvex részhalmaza az E Banach-tereknek. Tekintsük az $f : X \rightarrow X$ folytonos és kompakt leképezést. Ekkor f -nek létezik fixpontja.

Bizonyítás. (2.2.2. Tétel) Felhasználva a Paraméterezett Ekeland variációs elvet (2.1.2. tétel), létezik egy folytonos leképezés: $y_i : X_{\hat{i}} \rightarrow X_i$ úgy, hogy

$$f_i(x_1, \dots, y_i(x_{\hat{i}}), \dots, x_n) \leq f_i(x) + \varepsilon\|x_i - \bar{x}_i\|, x \in X \text{ és minden } i = 1, \dots, n\text{-re.} \quad (2.2.1)$$

Ekkor

$$X_2 \times \dots \times X_n \ni x_1 \mapsto (y_2(\varphi_2(x_{\hat{1}})), \dots, y_n(\varphi_n(x_{\hat{1}}))) \in X_2 \times \dots \times X_n$$

összetett leképezés, ahol $\varphi_i(x_{\hat{1}}) = (y_1(x_{\hat{1}}), x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ egy folytonos függvény, mely az $X_2 \times \dots \times X_n$ konvex, kompakt halmazt képezi le önmagára. Tehát a Schauder-féle fixpont tétel alapján létezik az $\bar{x}_{\hat{1}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ fixpont. Ha a $\bar{x}_{\hat{1}}$ -et $y_1(\bar{x}_{\hat{1}})$ -nek választjuk, akkor $\bar{x}_i = y_i(\bar{x}_{\hat{i}}), \forall i = 2, \dots, n$. A (2.2.1)-es relációba helyettesítve, épp a keresett egyenlőtlenséget kapjuk. ■

Végezetül ismerjük meg az Ekeland variációs elv egy másik általánosítását, mely tulajdonképpen ezen elv egy minimax-problémákra való kiterjesztése. Ez a tétel tekinthető egy minimax variációs elvnek is.

2.2.4. Tétel. Tekintsük az E_1 illetve E_2 Banach-tereket, valamint ezek X illetve Y részhalmazát, ahol X zárt és nemüres, míg Y konvex, zárt, nemüres és korlátos halmaz. Válasszuk meg az $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy rendelkezzen a következő tulajdonságokkal:

- (1) az $\{f(\cdot, y) : y \in Y\}$ függvények ekvifolytonosak,
- (2) az $f(x, \cdot)$ függvény konkáv és folytonos, minden $x \in X$ -re,
- (3) $\sup_{y \in Y} f(x, y) < +\infty$, bármely $x \in X$ esetén,
- (4) $\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) > -\infty$.

Adottak továbbá az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ értékek és tekintsük az $x' \in X$ illetve $y' \in Y$ pontokat úgy, hogy

$$(5) \sup_{y \in Y} f(x', y) < \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) + \varepsilon_1,$$

$$(6) f(x', y') > \sup_{y \in Y} f(x', y) - \varepsilon_2.$$

Ekkor létezik az $\tilde{y} : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés és egy $x_0 \in X$ pont úgy, hogy $y_0 = \tilde{y}(x_0)$ esetén

$$(7) f_2(x_0, y_0) = \max_{y \in Y} f_2(x_0, y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f_2(x, y), \text{ ahol}$$

$$f_2(x, y) = f(x, y) + \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\lambda_1} \|x - x_0\| - \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \|y - \tilde{y}(x)\|, \quad \text{és} \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \text{diam } Y,$$

$$(8) x_0 \text{ és } y_0 \text{ a } \sup_{y \in Y} f_2(\cdot, y) \text{ illetve } f_2(x_0, \cdot) \text{ függvények erős minimum-, illetve maximum pontjai,}$$

$$(9) \|x_0 - x'\| < \lambda_1, \|y' - y_0\| \leq \lambda_2 + \|\tilde{y}(x') - \tilde{y}(x_0)\|.$$

Bizonyítás. Válasszunk egy $\delta > 0$ számot, melyre $f(x', y') > \sup_{y \in Y} f(x', y) - \varepsilon_2 + \delta$. Látható, hogy alkalmazhatjuk a 2.1.2. tételt a $-f$ függvényre és az $y'(x) =: y'$ folytonos leképezésre, $\forall x \in X$: létezik az $\tilde{y} : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés úgy, hogy

$$\begin{aligned} f(x, \tilde{y}(x)) &= \max_{y \in Y} \left[f(x, y) - \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \|y - \tilde{y}(x)\| \right] \quad \text{minden } x \in X\text{-re,} \\ \|\tilde{y}' - \tilde{y}(x)\| &< \lambda_2, \quad \text{amikor} \quad f(x, y') > \sup_{y \in Y} f(x, y) - \varepsilon_2 + \delta, \text{ valamint} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$\tilde{y}(x)$ az $f_1(x, \cdot) = f(x, \cdot) - \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \|\cdot - \tilde{y}(x)\|$ függvény erős maximumpontja Y felett, minden $x \in X$ esetén. Felhasználva az (5)-ös tulajdonságot találhatunk egy $\varepsilon'_1 < \varepsilon_1$ értéket, melyre

$$\sup_{y \in Y} f(x', y) < \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) + \varepsilon'_1.$$

Emellett,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in Y} f_1(x', y) &\leq \sup_{y \in Y} f(x', y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \left\{ f_1(x, y) + \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \|y - \tilde{y}(x)\| \right\} + \varepsilon'_1 \leq \\ &\leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f_1(x, y) + \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \text{diam } Y + \varepsilon'_1. \end{aligned}$$

Jelöljük $\bar{\varepsilon}_1 := \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \text{diam } Y + \varepsilon_1$, és legyen $\bar{\varepsilon}'_1 := \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \text{diam } Y + \varepsilon'_1$. Az Ekeland variációs elv alapján következik, hogy létezik olyan $x_0 \in B(x'; \lambda_1)$ pont, melyre $\min_{x \in X} \left\{ \sup_{y \in Y} f_1(x, y) + \frac{\bar{\varepsilon}'_1}{\lambda_1} \|x - x_0\| \right\} = \sup_{y \in Y} f_1(x_0, y)$, mely által a (7)-es tulajdonság igazolása teljes. Ekkor viszont a (2.2.1.)-es reláció szerint a (9)-es tulajdonság is teljesül.

Már csak azt kellene belássuk, hogy a (8)-as tulajdonság is teljesül. Hasonlóan járunk el, mint a 2.1.2-es tétel esetében. Legyen tehát az $(x_n)_{n \geq 1}$ egy minimalizációs sorozat a $\varphi(x) = \max_{y \in Y} f_2(x, y)$ függvényre. Ekkor $\varphi(x_0) \leq \varphi_1(x_n) < \varphi_2(x_n) \rightarrow \varphi(x_0)$, ahol $\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{\bar{\varepsilon}'_1}{\lambda_1} \|x - x_0\|$ és $\varphi_2(x) = \varphi(x) + \frac{\bar{\varepsilon}_1}{\lambda_1} \|x - x_0\|$. Így $\varphi_2(x_n) - \varphi_1(x_n) \rightarrow 0$, azaz $\frac{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}'_1}{\lambda_1} \|x_n - x_0\| \rightarrow 0$. Tehát a bizonyítás teljes. ■

3. Következtetések és további célok

Az Ekeland variációs elv az egyik legismertebb és legtöbbet alkalmazott eredménye a matematikai analízisnek. A dolgozatban pontosan erre a sokrétűségre igyekeztünk rávilágítani az elv különböző variációinak, általánosításainak illetve alkalmazásainak felsorakoztatásával.

További cél az *Ekeland és Borwein-Preiss variációs elvek kiterjesztése b -metrikus terekre*.

A $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt (X tetszőleges halmaz) **b -metrikának** nevezzük, ha adott $s \geq 1$ valós számra és bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesülnek a következő feltételek:

- a) $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;
- b) $d(x, y) = d(y, x)$;
- c) $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Ekkor az (X, d) párt **b -metrikus térnek** nevezzük.

A közelmúltban P. Georgiev, a "Proceedings of the American Mathematical Society"-ben jelent "Parametric Borwein-Preiss variational principle and applications" című publikációjában a Borwein-Preiss variációs elv paraméteres változatát ismertette. Egy másik törekvésünk a *paraméterezett Ekeland- és a paraméterezett Borwein-Preiss variációs elv egy közös általánosításának* megfogalmazása.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Dr. Varga Csabának segítségéért és támogatásáért.

Hivatkozások

- [1] Ivar Ekeland: *Nonconvex minimization problems*, Bulletin Of American Mathematical Society, 1 (1979) (443-474).
- [2] Pando G. Georgiev: *Parametric Ekeland's Variational Principle*, Applied Mathematical Letters, 14 (2001) (691-696).
- [3] Pando G. Georgiev: *The Strong Ekeland Variational Principle, the Strong Drop Theorem and applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 131 (1988) (1-21)
- [4] A. Kristály: *A set-valued approach to critical and equilibrium points*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2009.
- [5] M. Boriceanu, A. Petrușel, I. A. Rus: *Fixed point theorems for some multivalued generalized contractions in b-metric spaces*, International Journal of Mathematics and Statistics, (2010)(65-76).
- [6] Ioan Pop: *Topologie algebrică*, Editura Științifică, București, 1990.
- [7] Varga Csaba: *Metode topologice în calculul variațional*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2005.